



Identificación de Sistemas Dinámicos basado en datos

Edgar Diego Molina Trofimova, Orestes Llanes-Santiago

RESUMEN / ABSTRACT

En el contexto de la iniciativa Industria 4.0, se enfrenta el desafío crucial de analizar grandes volúmenes de datos para la optimización de procesos y mejorar la toma de decisiones. En este entorno, la creación y el uso de gemelos digitales, réplicas virtuales de sistemas del mundo real, se vuelve esencial. Sin embargo, la construcción de gemelos digitales precisos y confiables utilizando principios básicos se convierte en un problema muy complicado dada la complejidad de las plantas industriales modernas, por lo que se necesita entonces buscar nuevas herramientas que permitan encontrar los modelos para la construcción de esos gemelos digitales. En este trabajo se presenta el uso de la Descomposición en Modos Dinámicos (DMD) para la obtención de modelos discretos lineales de sistemas no lineales a partir de los datos obtenidos del proceso que no precisa de un conocimiento profundo del mismo. Para validar la factibilidad de esta herramienta, se experimenta con los datos generados a partir de la simulación del modelo no lineal de un manipulador robótico de una unión rígida. Usando el algoritmo de Descomposición en Modos Dinámicos con Control (DMDc), se construye el modelo dinámico discreto lineal del mismo y se verifica el satisfactorio comportamiento del modelo al compararse su respuesta con la del sistema no lineal.

Palabras claves: Industria 4.0, Identificación de Sistemas, Descomposición en Modos Dinámicos, Análisis de Datos

In the context of the Industry 4.0 initiative, there is a crucial challenge of analyzing large volumes of data for process optimization and to improve the decision-making. In this environment, the creation and utilization of digital twins, virtual replicas of real-world systems, becomes essential. However, constructing precise and reliable digital twins using basic principles becomes a highly complicated problem given the complexity of modern industrial plants. Therefore, it is necessary to explore new tools to find models for the construction of these digital twins. This paper presents the use of Dynamic Mode Decomposition (DMD) to obtain discrete linear models of nonlinear systems from the data obtained from the process that does not require in-depth knowledge of it. To validate the feasibility of this tool, experiments are conducted by using the data generated from the simulation of the nonlinear model of a robotic manipulator of a rigid joint. Using the Dynamic Mode Decomposition with Control (DMDc) algorithm, the linear discrete dynamic model is constructed and the satisfactory behavior of the model is verified by comparing its response with that of the nonlinear system.

Keywords: Industry 4.0, System Identification, Dynamic Mode Decomposition, Data Analysis

Data-based identification of dynamic system

1. -INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia, la búsqueda del conocimiento ha experimentado una evolución marcada por paradigmas en el descubrimiento científico. Inicialmente, la ciencia se basaba en la evidencia empírica, dando lugar al primer paradigma. Con la formulación de leyes y ecuaciones por científicos, surgió el segundo paradigma de la ciencia teórica. Sin embargo, la complejidad de los problemas llevó al tercer paradigma, que incorporó la ciencia computacional para resolver dificultades analíticas. En la actualidad, la sociedad se encuentra inmersa en un cuarto paradigma [1], caracterizado por la ciencia intensiva en datos. En este nuevo enfoque, las tecnologías modernas permiten la generación masiva de datos a partir de experimentos y simulaciones, transformando la investigación científica al incorporar el análisis computacional para identificar patrones y tendencias a una escala previamente inimaginable. Este paradigma fusiona la ciencia intensiva en datos con la ciencia computacional, abriendo nuevas fronteras en la exploración del conocimiento y situando la interconexión de datos y el análisis

Recibido: 10/2024 Aceptado: 12/2024

computacional como elementos fundamentales para comprender los misterios del universo.

Acompañando a este incipiente paradigma del descubrimiento científico, la sociedad se halla inmersa en una nueva revolución industrial, donde surge la iniciativa Industria 4.0, una fase revolucionaria en la manufactura que incorpora tecnologías digitales avanzadas para transformar radicalmente los procesos industriales. La Industria 4.0 se caracteriza por la digitalización y la interconexión de sistemas, generando una gran cantidad de datos en tiempo real provenientes de diversas fuentes, como sensores, máquinas y procesos de producción. Estos datos son usados para mejorar, la eficiencia, la productividad y la seguridad de los procesos industriales [2,3]. Este escenario se alinea estrechamente con el cuarto paradigma, que aboga por la ciencia intensiva con el uso de datos como un nuevo enfoque para la exploración científica [4].

En el corazón de la iniciativa Industria 4.0 se encuentran los espacios ciberfísicos, entornos donde la realidad física se entrelaza con la dimensión digital, permitiendo una interconexión y colaboración sin precedentes [4]. Estos espacios ciberfísicos se presentan como un componente crucial para la implementación exitosa de la iniciativa Industria 4.0, facilitando la recopilación, procesamiento y análisis eficiente de los datos generados. Uno de los elementos destacados en la iniciativa Industria 4.0 es la utilización de gemelos digitales. Un gemelo digital se define como una réplica virtual de un sistema físico, creando un modelo en tiempo real que simula su comportamiento y proporciona retroalimentación [5]. Este concepto se convierte en una herramienta esencial en la Industria 4.0, permitiendo a los fabricantes optimizar procesos, prever problemas y mejorar la toma de decisiones.

Para la creación de estos gemelos, es necesario crear modelos que reflejen con precisión el proceso o sistema físico al que responden. Para eso, existen varias técnicas de modelación, como la modelación usando los primeros principios y la identificación de sistemas [6]. Con los espacios ciberfísicos y el desarrollo de la tecnología se acumulan una gran cantidad de datos, los cuales son de gran utilidad para la identificación de sistemas, y en los últimos años se han desarrollado técnicas y herramientas, con las cuales es posible obtener modelos a partir de estos datos. Estos modelos permiten evaluar técnicas avanzadas de control como control discontinuo, control inteligente y control predictivo por solo citar algunos ejemplos [7-10]. Una de estas técnicas que resalta por su elegancia y simpleza es la Descomposición en Modos Dinámicos (DMD), desarrollada en la comunidad de dinámicas de fluidos [11]. El método de DMD está basado en técnicas de álgebra lineal elemental y en el operador de Koopman [12] lo que permite crear modelos lineales, aunque los sistemas analizados sean no lineales.

En este trabajo se presenta la aplicación de una metodología basada en la herramienta DMD para obtener el modelo lineal discreto de un manipulador robótico de una unión que es un sistema no lineal. La validez y eficacia del modelo obtenido se verifican a través de simulaciones comparándose con los resultados del sistema no lineal.

La estructura del trabajo es la siguiente: en la sección 2, Materiales y Métodos, se presenta la metodología usada para la obtención del modelo de la planta a partir de los datos usando la herramienta DMD con control (DMDc) y el modelo no lineal del manipulador robótico usado en la experimentación. En la sección 3 se presenta el diseño del experimento y la discusión de los resultados. Finalmente se presentan las conclusiones y las recomendaciones para futuros trabajos.

2.- MATERIALES Y MÉTODOS

En esta sección se presentarán los principales elementos teóricos que soportan las herramientas de Descomposición en Modos Dinámicos y Descomposición en Modos Dinámicos con control. Se presenta también la metodología para la identificación de sistemas de control mediante la herramientas DMDc y las características fundamentales del manipulador robótico de una unión rígida que se utilizará en la experimentación.

2.1.- METODOLOGÍA BASADA EN DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DINÁMICOS (DMD)

El método de descomposición en modos dinámicos (DMD) tiene sus orígenes en la comunidad de dinámicas de fluidos y surge como un método para separar las dinámicas de flujos complejos en una interpretación simple, basada en estructuras espacio-temporales lógicas, desarrollado por Schmid [11]. El éxito de DMD se fundamenta en dos aspectos claves: en primer lugar, es un método que se basa en datos y prescinde de ecuaciones, lo cual le permite realizar una descomposición precisa de sistemas complejos en estructuras coherentes espacio-temporales. Estas estructuras pueden utilizarse para prever y controlar estados futuros a corto plazo. En segundo lugar, el DMD está conectado a la dinámica no lineal subyacente a través del operador de Koopman [12], lo que convierte a esta herramienta en una particularmente útil. Gracias a esta conexión, el DMD es capaz de trabajar eficazmente con datos provenientes de sistemas no lineales, abarcando así todos los procesos reales.

2.1.1.- FUNDAMENTACIÓN DE DMD

Un sistema de tiempo discreto lineal muestreado cada Δt en el tiempo tiene la forma representada en (1):

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k \quad (1)$$

donde \mathbf{A} es la matriz en la forma dinámica de tiempo discreto que relaciona el estado actual del sistema con el siguiente, y \mathbf{x}_k la salida del sistema donde $k = 1, 2, \dots, m$. Como las instantáneas de datos a tener en cuenta son por lo general muestreadas a partir de sistemas dinámicos no lineales, se pueden agrupar las salidas como en (2) y en (3):

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_{m-1} \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad (3)$$

de esta forma, la aproximación localmente lineal (1) puede escribirse en términos de estas matrices de datos:

$$\mathbf{X}' \approx \mathbf{A}\mathbf{X} \quad (4)$$

donde la matriz \mathbf{A} de mejor ajuste está dada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}'\mathbf{X}^\dagger \quad (5)$$

donde \dagger es la pseudoinversa de Moore-Penrose.

Los modos de DMD, también llamados modos dinámicos, son los autovectores de \mathbf{A} , y cada modo corresponde a un autovalor particular de \mathbf{A} [13].

2.1.2.- ALGORITMO DMD

En la práctica, cuando la dimensión del estado (n) es grande, la matriz \mathbf{A} puede resultar difícil de analizar directamente. En cambio, DMD evita la descomposición propia de \mathbf{A} al considerar una representación de rango reducido en términos de una matriz \mathbf{A} proyectada por Descomposición Ortogonal Adecuada (o por sus siglas en inglés: POD). El algoritmo DMD, como función, procede de la siguiente manera [14]:

- a. Desarrollar la descomposición en valores singulares(SVD) de \mathbf{X} :

$$\mathbf{X} \approx \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^* \quad (6)$$

donde $*$ denota la transpuesta conjugada, $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n \times r}$, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ y $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{m \times r}$. Aquí r es el rango de la aproximación reducida de SVD de \mathbf{X} . Los vectores singulares izquierdos \mathbf{U} son modos POD. Las columnas de \mathbf{U} son ortonormales, por lo que $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{I}$, igualmente $\mathbf{V}^*\mathbf{V} = \mathbf{I}$. $\mathbf{\Sigma}$ es una matriz diagonal cuya diagonal principal está formada por los valores singulares.

La reducción SVD en (6) se aprovecha en esta etapa del algoritmo para realizar un truncamiento de rango bajo de los datos. Específicamente, si hay una estructura de baja dimensión en los datos, los valores singulares de $\mathbf{\Sigma}$ disminuirán bruscamente a cero con solo un número limitado de modos dominantes.

- b. La matriz \mathbf{A} de (5) puede obtenerse usando la pseudoinversa de \mathbf{X} , la cual se puede hallar usando SVD:

$$\mathbf{A} = \mathbf{X}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{U}^* \quad (72)$$

En la práctica, computacionalmente es más eficiente calcular $\tilde{\mathbf{A}}$, la proyección $r \times r$ de la matriz completa \mathbf{A} en modos POD:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}^*\mathbf{X}\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1} \quad (8)$$

La matriz $\tilde{\mathbf{A}}$ define un modelo lineal de baja dimensión del sistema dinámico en coordenadas de POD:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1} = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}_k \quad (9)$$

es posible reconstruir el estado de alta dimensión $\mathbf{x}_k = \mathbf{U}\tilde{\mathbf{x}}_k$.

- c. Calcular los autovalores y autovectores de $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{W} = \mathbf{W}\mathbf{\Lambda} \quad (30)$$

donde las columnas de \mathbf{W} son los autovectores y $\mathbf{\Lambda}$ es una matriz diagonal que contiene los correspondientes autovalores λ_k .

- d. Finalmente, se procede a reconstruir la descomposición propia de \mathbf{A} a partir de \mathbf{W} y $\mathbf{\Lambda}$. En particular, los autovalores de \mathbf{A} están dados por $\mathbf{\Lambda}$ y los autovectores de \mathbf{A} (modos DMD) están dados por columnas de $\mathbf{\Phi}$:

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}'\mathbf{V}\mathbf{\Sigma}^{-1}\mathbf{W} \quad (11)$$

2.2.- DESCOMPOSICIÓN EN MODOS DINÁMICOS CON CONTROL(DMDc)

DMD con control (DMDc) utiliza tanto las mediciones del sistema como el control externo aplicado para extraer la dinámica subyacente y las características de entrada-salida. DMDc tiene las mismas características y el mismo basamento teórico que DMD, por lo que también tiene las mismas ventajas: libre de ecuaciones, trabaja solamente con datos de medición que pueden ser de alta dimensionalidad, los cuales conectan con el análisis de sistemas dinámicos no lineales a través del operador de Koopman [14].

2.2.1.- FORMULACIÓN DE DMDc

El objetivo de DMDc es caracterizar la relación entre las mediciones que definen el estado actual \mathbf{x}_k , las mediciones del estado futuro \mathbf{x}_{k+1} y el control actual \mathbf{u}_k . Esta relación se puede expresar de la forma canónica de un sistema dinámico lineal discreto:

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (12)$$

Donde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^q$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times q}$. \mathbf{A} describe la dinámica del sistema sin control y \mathbf{B} es la matriz de control que junto con \mathbf{u}_k influye en las variables de estado \mathbf{x}_k . En DMDc, el objetivo es hallar las mejores aproximaciones de las matrices \mathbf{A} y \mathbf{B} a partir de las mediciones.

Las matrices \mathbf{X} y \mathbf{X}' se forman de igual forma que en DMD a partir de \mathbf{x}_k , pero ahora se debe crear una nueva matriz a partir de \mathbf{u}_k , la cual se denominará \mathbf{Y} (ver figura 1):

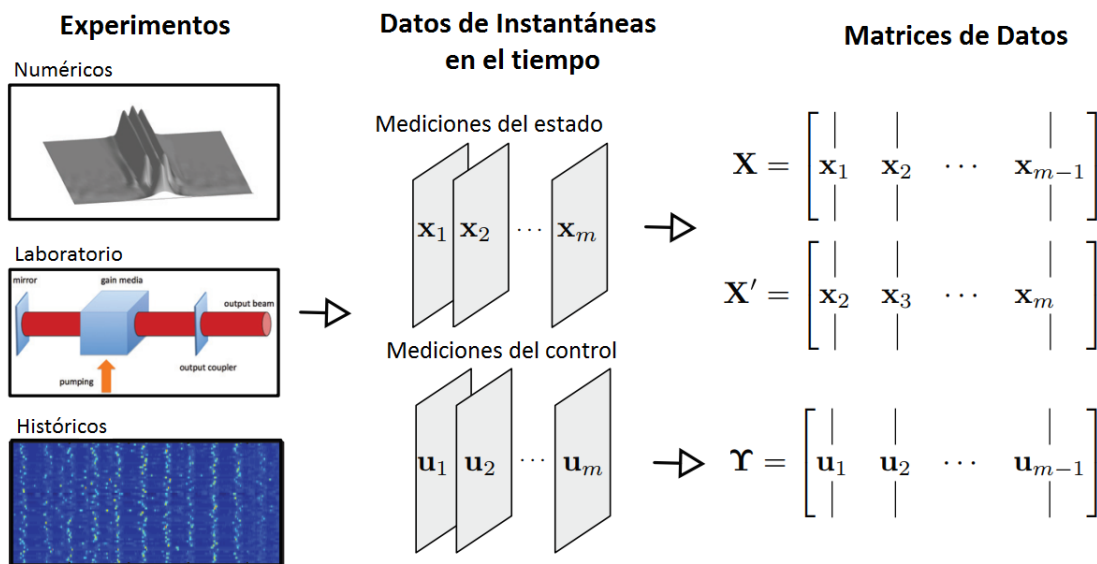


Figura. 1

Estructura de las matrices de datos para el DMDc. Foto adaptada de [14]

$$Y = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \cdots & \mathbf{u}_{m-1} \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix} \quad (13)$$

por lo que se puede reescribir la ecuación (12) de la siguiente manera:

$$X' \approx AX + BY \quad (14)$$

2.2.2.- CON MATRIZ B CONOCIDA

Bajo el supuesto que de la ecuación (14) se conoce la matriz B . A pesar de que es una suposición ideal, ya que en la mayoría de los sistemas más complejos esta información no es conocida, favorecerá a entender cómo funciona DMDc. En este caso el objetivo es hallar la matriz A , por lo que para eso, dada la ecuación (14), se restan las matrices de Y y B a la matriz de instantáneas X' , y a partir de aquí el procedimiento es similar al de DMD, multiplicando en cada miembro (por la derecha) por la pseudoinversa de X , la cual es hallada a partir de SVD con un radio de truncamiento deseado:

$$X' - BY \approx AX \quad (15)$$

$$X' - BY \approx AU\Sigma V^* \quad (16)$$

La matriz A de mayor ajuste se puede calcular como:

$$A = (X' - BY)V\Sigma^{-1}U^* \quad (17)$$

Esta derivación es equivalente a DMD si las instantáneas de entrada son $\mathbf{u}_j = \mathbf{0} \forall j \in [1, m - 1]$ o $B = \mathbf{0}$. Si el valor de truncamiento $r \ll n$, se puede encontrar un modelo más compacto y computacionalmente eficiente usando una transformación de base $\tilde{\mathbf{x}} = U^* \mathbf{x}$ similar a DMD. La aproximación de orden reducido de A es:

$$\tilde{A} = U^*(X' - BY)V\Sigma^{-1} \quad (4)$$

Se puede construir un modelo de orden reducido usando \tilde{A} y $\tilde{B} = U^*B$. La descomposición propia de \tilde{A} , definida por $\tilde{A}W = W\Lambda$, produce autovectores que pueden usarse para encontrar los modos dinámicos de A . Los modos dinámicos exactos se pueden encontrar con:

$$\Phi = (X' - BY)V\Sigma^{-1}W. \quad (19)$$

2.2.3.- CON MATRIZ B DESCONOCIDA

Suponiendo que no se conoce la matriz B , se puede reformular (14) de la siguiente manera:

$$X' \approx [A \ B] \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = G\Omega \quad (20)$$

Donde $G \triangleq [A \ B]$ es la matriz de operadores aumentada y $\Omega \triangleq \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$ es la matriz de datos aumentada.

Como las matrices A y B son las que hay que hallar, y estas están contenidas en G , quedaría entonces:

$$G = X'\Omega^\dagger \quad (5)$$

$$[A \ B] = X' \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}^\dagger \quad (22)$$

Para hallar G de mejor ajuste, entonces, para esto, al igual que en DMD (Ver Fig. 2), se efectúa la SVD con truncación en la matriz Ω , que es la que contiene las muestras de las mediciones y de los valores de control por instantes de tiempo, haciendo que $\Omega = \tilde{U}\tilde{\Sigma}\tilde{V}^*$. Una aproximación de G se puede calcular como:

$$G = X'\tilde{V}\tilde{\Sigma}^{-1}\tilde{U}^{-1} \quad (23)$$

donde $G \in \mathbb{R}^{n \times (n+q)}$. Las aproximaciones de las matrices A y B pueden ser halladas dividiendo los vectores singulares

izquierdos \tilde{U} en dos componentes separados:

$$[A \ B] \approx [X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}_1^* \quad X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}_2^*] \quad (24)$$

donde $\tilde{U}_1 \in \mathbb{R}^{n \times \tilde{r}}$, $\tilde{U}_2 \in \mathbb{R}^{q \times \tilde{r}}$, y $\tilde{U}^* = [\tilde{U}_1^*, \tilde{U}_2^*]$ y \tilde{r} es el radio de truncamiento. Para sistemas de alta dimensión donde $n \gg 1$, resolver y almacenar los operadores A y B puede ser computacionalmente inviable. En su lugar, se puede resolver una aproximación de orden reducido, lo que lleva a un modelo computacional más manejable. Se busca una transformación a un subespacio de dimensiones inferiores en el que evoluciona la dinámica.

DMD utiliza los vectores singulares truncados U para definir el subespacio para la aproximación de orden reducido. DMDc no puede usar \tilde{U} para encontrar el modelo de bajo rango de la dinámica y la matriz de entrada ya que \tilde{U} está definido para el espacio de entrada, que ahora incluye tanto las mediciones de estado como las entradas de control. En lugar de \tilde{U} , se construye un subespacio de orden reducido a partir de las medidas de salida X' . Esta observación es fundamental para comprender DMDc como un método para encontrar el operador que mejor se ajuste entre los datos de entrada y salida.

La matriz de datos del espacio de salida X' se puede utilizar para encontrar el subespacio de orden reducido. Una segunda SVD en X' da la factorización $X' = \hat{U} \hat{\Sigma} \hat{V}^*$, donde el valor de truncamiento es r y $\hat{U} \in \mathbb{R}^{n \times r}$, $\hat{\Sigma} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ y $\hat{V}^* \in \mathbb{R}^{r \times m-1}$. Es probable que los dos SVD tengan diferentes valores de truncamiento de las matrices de entrada y salida \tilde{r} y r , donde típicamente $\tilde{r} > r$. Usando la transformación $x = \hat{U} \tilde{x}$, se pueden calcular las siguientes aproximaciones de orden reducido de A y B :

$$\tilde{A} = \hat{U}^* \bar{A} \hat{U} = \hat{U}^* X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}_1^* \hat{U}, \quad (25)$$

$$\tilde{B} = \hat{U}^* \bar{B} = \hat{U}^* X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}_2^* \quad (26)$$

donde $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ y $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{r \times q}$.

Igual que en DMD, los modos dinámicos de A pueden hallarse solucionando la descomposición de autovalores $AW = WA$. La transformación de autovectores a modos dinámicos de A está ligeramente modificada y viene dada por:

$$\Phi = X' \tilde{V} \tilde{\Sigma}^{-1} \tilde{U}_1^* \hat{U} W \quad (27)$$

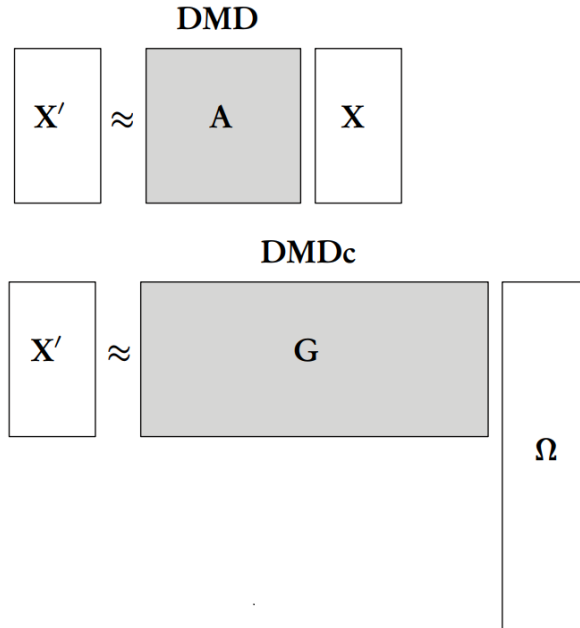


Figura. 2

Una manera ilustrativa de la representación del tamaño de las matrices para el DMD y el DMDc. Los bloques en gris son las matrices que el DMD y el DMDc construye. Figura adaptada de [14]

2.2.4.- ALGORITMO DMDc

Los pasos para aplicar un DMDc serían:

- a. Construir las matrices de datos:

Recopilar las instantáneas de medición y control del sistema y formar las matrices \mathbf{X} , \mathbf{X}' y \mathbf{Y} y a partir de estas crear la matriz de datos aumentada $\mathbf{\Omega}$.

- b. Realizar la descomposición en valores singulares de $\mathbf{\Omega}$:

El cálculo de SVD, se efectúa con un radio de truncamiento \tilde{r} para desechar los valores singulares nulos o casi nulos.

- c. Calcular la descomposición en valores singulares de \mathbf{X}' :

Obtener $\mathbf{X}' \approx \tilde{\mathbf{U}} \tilde{\mathbf{\Sigma}} \tilde{\mathbf{V}}^*$ con radio de truncamiento r .

- d. Calcular las aproximaciones de las matrices que componen $\mathbf{G} = [\mathbf{A} \ \mathbf{B}]$.

$$\tilde{\mathbf{A}} = \tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}^* \mathbf{X}' \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_1^* \tilde{\mathbf{U}},$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{U}}^* \tilde{\mathbf{B}} = \tilde{\mathbf{U}}^* \mathbf{X}' \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_2^*$$

- e. Realizar la descomposición de autovalores de $\tilde{\mathbf{A}}$:

$$\tilde{\mathbf{A}} \mathbf{W} = \mathbf{W} \mathbf{\Lambda}$$

- f. Calcular los modos dinámicos de la matriz \mathbf{A} :

$$\mathbf{\Phi} = \mathbf{X}' \tilde{\mathbf{V}} \tilde{\mathbf{\Sigma}}^{-1} \tilde{\mathbf{U}}_1^* \tilde{\mathbf{U}} \mathbf{W}$$

2.3.- METODOLOGÍA PARA LA IDENTIFICACIÓN DE SISTEMAS HACIENDO USO DE DMDc.

Para la identificación de sistemas usando el método de DMDc se deben seguir los siguientes pasos:

- Confeccionar las matrices de datos \mathbf{X} , \mathbf{X}' y \mathbf{Y} de la forma que aparece en (2), (3) y (13) respectivamente, a partir de los datos registrados de la planta e un intervalo de tiempo. Estos datos deben haber sido muestreados con un tiempo de muestreo fijo.
- A partir de estas matrices, crear la matriz de datos aumentada $\mathbf{\Omega}$ y ejecutar la descomposición en valores singulares (SVD) de la misma, y trincar las matrices \mathbf{U} , \mathbf{V} y $\mathbf{\Sigma}$ en dependencia de la cantidad de valores singulares significativos que tenga la matriz $\mathbf{\Sigma}$, obteniendo las matrices $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ y $\tilde{\mathbf{\Sigma}}$.
- Calcular (24) para obtener \mathbf{A} y \mathbf{B} el cual ya sería el modelo dinámico lineal discreto.
- Validar el modelo hallado.

2.4.- MODELO MATEMÁTICO DEL MANIPULADOR ROBÓTICO DE UNA UNIÓN RÍGIDA.

Para probar la validez y efectividad del algoritmo DMDc, se obtendrá el modelo lineal discreto del manipulador robótico de una unión rígida presentado en [15] y mostrado en la Figura 3.

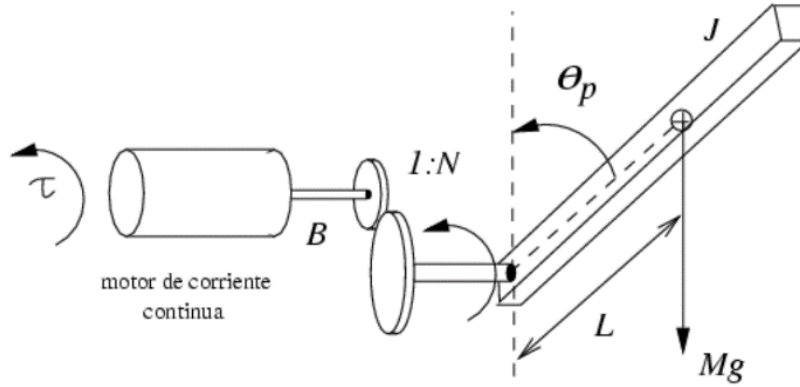


Figura. 3
 Manipulador robótico de una sola unión rígida. [15]

El modelo dinámico no lineal de ese manipulador es:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{B}{J}x_2 - \frac{c}{J}\sin\frac{x_1}{N} + \frac{u}{J} \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (286)$$

donde $x_1 = \theta_p$ (posición angular) y $x_2 = \dot{\theta}_p$ (velocidad angular), son las variables de estado y la variable de control está dada por el torque aplicado $u = \tau$. El parámetro N corresponde al factor de reducción angular del juego de engranajes que acopla el eje del motor al eje del brazo manipulador; B es el coeficiente de fricción viscosa y J es el momento de inercia; c es una constante que iguala al triple del producto MgL , donde M es la masa del brazo, g es la aceleración de la gravedad y L es la distancia del eje al centro de masa del brazo manipulador. El punto de equilibrio del sistema, parametrizado con respecto a la posición angular deseada X , está dada por:

$$x_1(X) = X; x_2(X) = 0; u = U(X) = c \sin\frac{X}{N} \quad (29)$$

3.- DISEÑO DE EXPERIMENTOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para el trabajo con el modelo, se emplearon los siguientes parámetros obtenidos de [15]

$$X = 1, B = 0.01, N = 1, c = 0.58, J = 0.04, x_0 = [0.5; 0].$$

Para el sistema no lineal fue diseñada la siguiente ley de control usando el método de linealización aproximada

$$u = -K_1(x_1 - X) - K_2x_2 + c \sin\frac{X}{N} \quad (30)$$

Los valores de las ganancias fueron calculados para lograr que los polos en lazo cerrado se ubiquen en $s_{1,2} = -6.0519 \pm 6.0537i$. y los valores obtenidos fueron $K_1 = 2.6175$ y $K_2 = 0.4742$.

Para conformar las matrices de datos necesarias para aplicar el algoritmo DMDC se simuló el sistema no lineal (28) y se obtuvieron 101 muestras de los estados y de la entrada de control con un periodo de muestreo de 0,01 seg y un valor de $X=1$ rad. Al aplicar el métodos DMDC se obtuvieron las siguientes matrices A , B y Σ :

$$A = \begin{pmatrix} 0.9994 & 0.01 \\ -0.1112 & 0.9902 \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0.0012 \\ 0.2304 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 40.7623 & 0 & 0 \\ 0 & 29,1791 & 0 \\ 0 & 0 & 13.0312 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Con las matrices A y B obtenidas, se realizó la simulación del sistema lineal y se comparó con las salidas del sistema no lineal. Para ver la eficacia del modelo, en la simulación, en $t = 0.8s$, la referencia se cambió de 0.8 rad a 1.5 rad. Las figuras 4 y 5, muestran la posición angular y la velocidad angular del manipulador robótico para el sistema no lineal y para el sistema lineal obtenido usando el algoritmo DMDC. Como se aprecia los resultados del sistema lineal coinciden con los del sistema no lineal original.

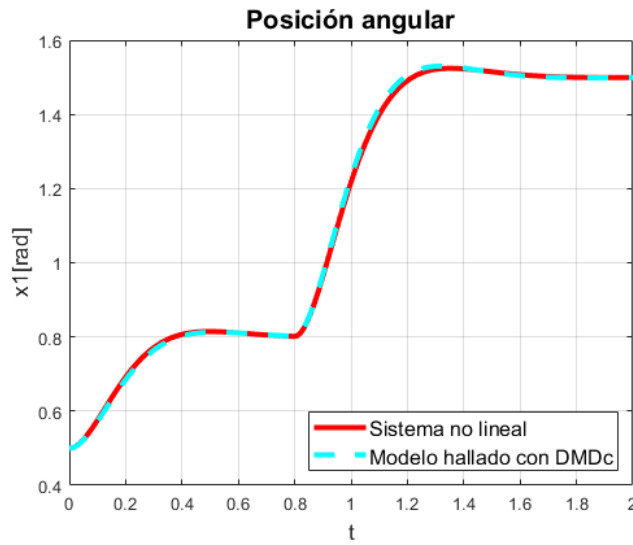


Figura. 4

Comparación de la posición angular entre el modelo hallado por DMDC y el sistema no lineal, variando la referencia de 0.8 rad a 1.5 rad en $t = 0.8s$

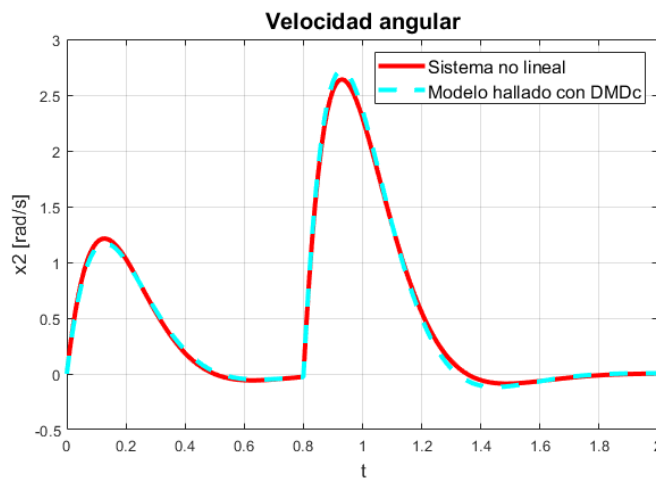


Figura. 5

Comparación de la velocidad angular entre el modelo hallado por DMDC y el sistema no lineal, variando la referencia de 0.8 rad a 1.5 rad en $t = 0.8s$

Para la validar el modelo, se hace uso del comando *resid*, del paquete de software MATLAB el cual genera gráficas para el

análisis de residuos con lo cual se realiza la validación.

La figura 6, muestra el error obtenido de la resta de la salida (posición angular) del modelo no lineal y del modelo lineal obtenido usando el algoritmo DMDC. Como se aprecia el error es significativamente pequeño.

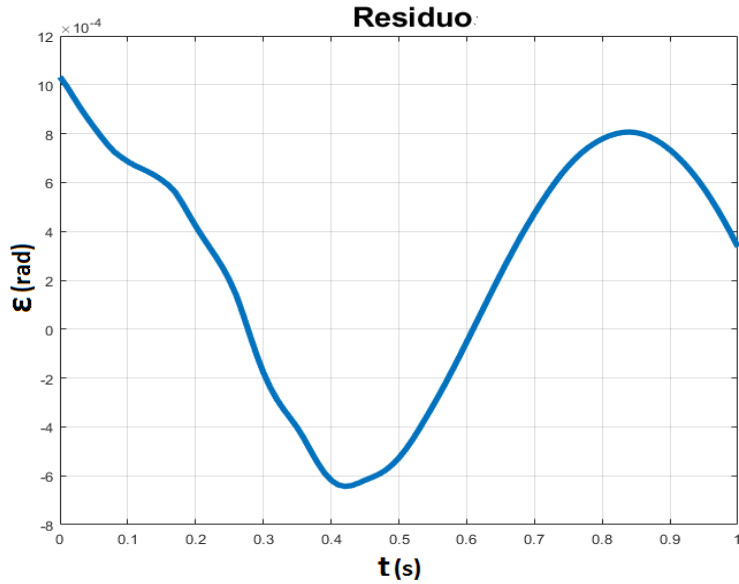


Fig. 6
Error entre la salida del sistema no lineal y el modelo lineal obtenido usando DMDC

La figura 7 muestra la correlación cruzada del residuo con la entrada y la misma indica que no hay correlación entre ellos. La figura 8 muestra la auto correlación del residuo y como se aprecia gran parte se encuentra dentro de los niveles de confianza establecidos. Estos dos indicadores confirman la efectividad del modelo lineal obtenido usando el algoritmo DMDC.

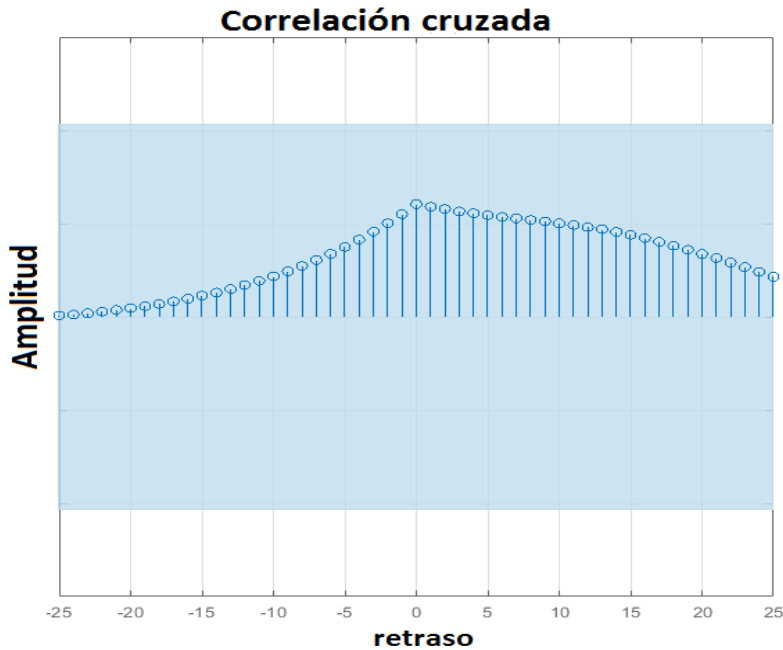


Figura. 7
Correlación cruzada de los residuos con la entrada

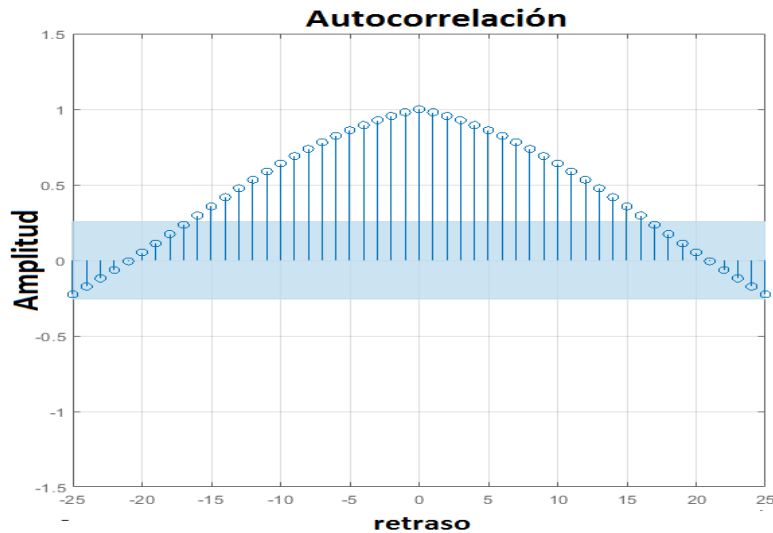


Figura. 8
Auto correlación del residuo

4.- CONCLUSIONES

DMD y DMDc métodos de análisis de datos emergentes que han demostrado ser herramientas eficaces en diversas aplicaciones, como la identificación de sistemas. Existe una íntima conexión entre DMD y el operador de Koopman lo que permite obtener modelos lineales a partir de la información obtenida de procesos no lineales. Este aspecto se destaca particularmente en el experimento llevado a cabo en el presente trabajo, donde se empleó DMDc para construir el modelo lineal discreto del modelo no lineal del brazo manipulador robótico de una unión rígida a partir de los datos generados por el sistema no lineal.

El modelo lineal generado exhibe consistentemente características similares al sistema no lineal del brazo robótico en la respuesta temporal alrededor del punto de operación, y para su obtención, se pudo observar que no fue necesario el conocimiento previo del funcionamiento de la planta o el empleo de ecuaciones para el modelo, solamente se usaron los datos generados por la misma. Esto subraya la efectividad de DMD como una herramienta valiosa en la identificación y modelado de sistemas dinámicos dada a que es una técnica libre de ecuaciones y bastante simple.

Otra característica ventajosa del método de DMD que vale la pena destacar es su capacidad para manejar conjuntos de datos de gran tamaño de manera eficiente. Esta eficiencia se logra gracias a que el algoritmo opera con una representación de rango reducido mediante la técnica de POD. A pesar de la potencial complejidad y dimensionalidad de la matriz de datos utilizada en el algoritmo DMD, el enfoque de rango reducido a través de POD permite trabajar con una representación más compacta. Esta característica es fundamental, ya que facilita el análisis de sistemas complejos sin comprometer la calidad de los resultados. Esta capacidad de trabajar con datos de gran escala sin perder precisión es esencial en situaciones donde la complejidad de los sistemas y la cantidad de información recopilada son significativas.

Como futuro trabajo de la investigación, se profundizará en el uso de funciones observables establecidas por la teoría de Koopman para el análisis de sistemas no lineales de mayor complejidad.

REFERENCIAS

1. Hey, A; S. Tansley y K. Tolle: The fourth paradigm: data-intensive scientific discovery. Ed. Microsoft Research Redmond, WA, 284 pp. 2009
2. Ares Milián M.J., Quiñones Grueiro M., Verde Rodarte C., Llanes-Santiago, O. A leak zone location approach in water distribution networks combining data-driven and model-based methods. *Water*, 2021, 13(20):2024.
3. Folgado FJ, Calderón D, González I, Calderón AJ. Review of Industry 4.0 from the Perspective of Automation and Supervision Systems: Definitions, Architectures and Recent Trends. *Electronics*. 2024, 13(4):782.
4. Pereira, A. C. y Romero, F. A review of the meanings and the implications of the Industry 4.0 concept. *Procedia Manufacturing*. 2017, 13:1206-1214.

5. Tao F., Qi Q., Wang L., Nee A. Y.C. Digital Twins and Cyber-Physical Systems toward Smart Manufacturing and Industry 4.0: Correlation and Comparison. *Engineering*. 2019, 5(4):653-661.
6. Ogata, K.: *Modern Control Engineering*, International Edition (5th ed.), Pearson, EEUU, 2010
7. Sira Ramírez, H., Llanes-Santiago, O. Sliding Mode Control of nonlinear mechanical vibrations. *Journal of Dynamical System, Measurement and Control*. 2000, 122(4): 674-678.
8. Sira Ramírez H; Llanes-Santiago O., Arrieta Fernández, N. On the stabilization of nonlinear systems via input-dependent sliding surfaces. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1996, 6(8):771-780.
9. Lee, M.-FR Una revisión sobre la teoría del control inteligente y sus aplicaciones en la optimización de procesos y la fabricación inteligente. *Processes*. 2023, 11(11):3171.
10. Lee, J.H. Model predictive control: Review of the three decades of development. *International Journal of Control, Automation and Systems*. 2011, 9:415-424.
11. Schmid, P. J. Dynamic mode decomposition of numerical and experimental data. *Journal of Fluid Mechanics*. 2010; 656: 5-28.
12. Koopman, B. O., Neumann J.V.. Dynamical systems of continuous spectra. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*. 1932; 18:255-263.
13. Tu, J. H.; Rowley C.W., Luchtenburg D.M., Brunton S.L., Kutz J.N.. On dynamic mode decomposition: Theory and applications. *Journal of Computational Dynamics*. 2014; 1(2):391-421.
14. Kutz, J. N., Brunton S.L., Brunton B.W., Proctor J.L *Dynamic Mode Decomposition. Data Driven Modeling of Complex Systems*. Ed. SIAM, 2016.
15. Sira Ramírez H., Rivas Echeverría F., Márquez R., Llanes Santiago O. *Control de Sistemas No Lineales*, Ed. Prentice Hall, 2004.

CONFLICTO DE INTERESES

Ninguno de los autores manifestó la existencia de posibles conflictos de intereses que debieran ser declarados en relación con este artículo

CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

Edgar D. Molina Trofimova: Conceptualización, Curación de datos, Análisis formal, Investigación, Metodología, Software, Validación-Verificación, Redacción borrador original.

Orestes Llanes-Santiago: Conceptualización, Análisis formal, Adquisición de fondos, Investigación, Metodología, Administración de proyecto, Recursos, Supervisión, Validación y Verificación, Revisión y edición.

AUTORES

Edgar Dirgo Molina Trofimova: Ingeniero en Automática graduado en el 2023 en la Universidad Tecnológica de La Habana José Antonio Echeverría., CUJAE, La Habana, Cuba. Actualmente es profesor Adiestrado en el Departamento de Automática y Computación de la CUJAE. Sus intereses de investigación están en el análisis de datos usando herramientas de inteligencia computacional para su uso en la automatización de procesos industriales. Email: edgardiegomt@gmail.com. No. ORCID 0009-0002-2293-6494.

Orestes Llanes-Santiago, Ingeniero Electricista. Doctor en Ciencias Aplicadas. Profesor e Investigador Titular de la Universidad Tecnológica José Antonio Echeverría (CUJAE). Académico Titular de la Academia de Ciencias de Cuba. Email: orestes@tesla.cujae.edu.cu No. ORCID 0000-0002-6864-9629. Sus principales intereses de investigación están en el monitoreo de condición y diagnóstico de fallos en sistemas industriales, implementación del paradigma Industria 4.0, inteligencia computacional aplicada al control y el control de sistemas no lineales.



Esta revista se publica bajo una [Licencia Creative Commons Atribución-No Comercial-Sin Derivar 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/)